Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (T)

Juin-juillet 2021

Le bilan de la session 2021 de mathématiques voie T est satisfaisant

Le niveau des candidats est très hétérogène : les notes se sont étalées entre 4 et 19. La moyenne s'établit à 10,74 et l'écart-type à 4,59.

On peut noter chez la plupart des candidats des lacunes en calculs. Mais fort heureusement, nombre d'entre eux les ont compensées par des raisonnements astucieux, un exposé clair et rigoureux et ont été récompensés par de bonnes, voire d'excellentes notes.

Le jury aimerait insister sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes sont des compétences que nous souhaiterions fortement valoriser à l'avenir. Nous insistons sur le fait qu'après avoir tracé un tableau de variation, les candidats doivent être capable d'esquisser l'allure d'une courbe.
- Nous avons noté pas mal de lacunes en calcul, en particulier sur les calculs avec des puissances ou sur le calcul de dérivées.
- les théorèmes du cours doivent être connus précisément, avec leurs hypothèses précises et leurs conclusions.
- Nous avons aussi noté chez certains candidats quelques difficultés avec la formule des probabilités totales.
- Les questions informatiques ne doivent pas être négligées par les candidats. Elles ont permis à certains candidats d'améliorer significativement leur note.
- Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation : au cours de la présentation de l'exercice préparé, le jury pose des questions pour aiguiller le candidat vers la solution. Il convient d'y être attentif. Il est souvent utile d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Par ailleurs, une prestation peut être jugée excellente sans que le candidats ne traite beaucoup de questions, alors qu'un candidat traitant de manière approximative un grand nombre de questions en déformant au passage les théorèmes de son cours risque d'être déçu par sa note finale.
- La question sans préparation est aussi très importante. Là encore, pour la plupart d'entre elles, le candidat peut tout à fait faire bonne impression sans aller au bout de la question. L'important est de réfléchir et d'écouter les indications du jury. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation, et parfois dans les toutes dernières minutes.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T1

Exercice principal T1

Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue une succession de tirages avec remise de cette urne, jusqu'à ce que l'on ait obtenu au moins une fois une boule blanche et une boule noire. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche. On note T la variable aléatoire désignant le nombre de tirages effectués. (On rappelle que les tirages s'arrêtent dès que l'on a obtenu une boule blanche et une boule noire) On notera aussi, pour $j \in \mathbb{N}^*$, N_j l'événement "le j-ième tirage donne une boule noire."

1. **Question de cours** : Loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$: protocole, loi, espérance et variance.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. (a) Déterminer $T(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([T=2])$.
   (b) Á l'aide du système complet $[N_1, \bar{N_1}]$ calculer $\mathbb{P}([T=k])$ pour $k \in T(\Omega)$.
4. La variable e^X admet-elle une espérance ?
   On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches au moment où l'on s'arrête. Par exemple, si les tirages ont donné successivement : une boule noire, une boule noire,une boule noire et une boule blanche, alors $T=4$ et $U=1$.
5. (a) Déterminer $U(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}([U=1])$. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. Protocole ("premier succès" d'expériences identiques et indépendantes), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=k]] = (1-p)^{k-1}p$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$ (programme ECT2 page 5.)
2. Les tirages sont identiques et indépendants. (avec remise)
   $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right),\ \mathbb{E}(X)=3,\ V(X)=6.}$
3. (a) Il faut au minimum deux tirages pour avoir une boule blanche et une boule noire.
   $T(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{1\}$
   $[T=2] = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$
   Ces événements sont incompatibles : $\mathbb{P}([T=2]) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$
   Par indépendance : $\mathbb{P}([T=2]) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\boxed{=\dfrac{4}{9}.}$
   (b) Avec la formule des probabilités totales, pour $k \geqslant 2$:
   $\mathbb{P}([T=k]) = \mathbb{P}([T=k]\cap N_1) + \mathbb{P}([T=k]\cap B_1)$
   Si $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}([T=k]\cap N_1) = \mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$ et par indépendance : $\mathbb{P}([T=k]\cap N_1) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{3}$
   On fait la même chose pour $\mathbb{P}([T=k]\cap B_1)$.
   $$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.}$$
4. On utilise le théorème du transfert.
   Si cette série converge absolument, $\mathbb{E}(e^X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])e^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times e^k$

La somme partielle donne pour $N \geqslant 0$, $S_N = \frac{1}{3} \times e \times \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2e}{3}\right)^k$

Or, $\frac{2e}{3} > 1$ donc la série diverge

Ainsi $\boxed{e^X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

5. (a) On s'arrête lorsque après au moins une boule blanche.
$U(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[U = k]$ est possible.

$$\boxed{U(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

(b) Avec la formule des probabilités totales et le système complet $[N_1, B_1]$:
$\mathbb{P}([U = 1]] = \mathbb{P}([U = 1] \cap N_1) + \mathbb{P}([U = 1] \cap B_1)$
$\mathbb{P}([U = 1] \cap B_1) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{2}{9}$
$\mathbb{P}([U = 1] \cap N_1) = \mathbb{P}(N_1)$ (si l'on a N_1, nécessairement $U = 1$)
Ainsi $\boxed{\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9}}$
* Le plus simple est de voir que si $T = 2$, nécessairement, $U = 1$, donc :
$\mathbb{P}([U = 1]|[T = 2]) = 1 \neq \mathbb{P}([U = 1])$
$\boxed{\text{Les variables ne sont donc pas indépendantes.}}$

Exercice sans préparation T1

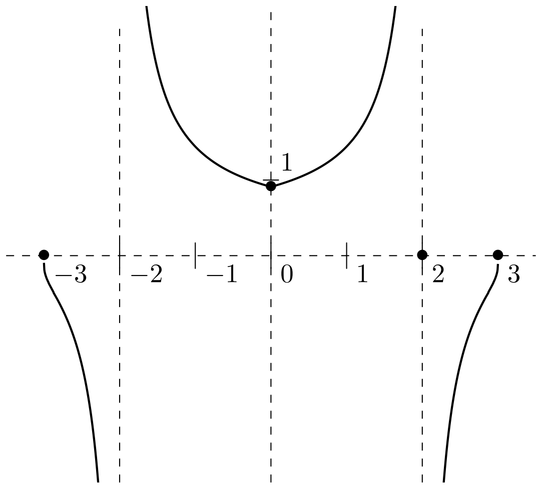
Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(3-|x|)}$

Solution :

1. On commence par le domaine de définition. Il y a deux conditions : $3-|x|>0$ et $\ln(3-|x|)\neq 0$
   ssi $|x|<3$ et $3-|x|\neq 1$ ssi $|x|\in[0;3[\setminus\{2\}$
   $\boxed{D_f=]-3;-2[\cup]-2;2[\cup]2;3[}$
2. On peut noter que $\boxed{f \text{ est paire.}}$
3. Si $x>0$ $|x|=x$
   Donc pour $x\in]0;2[\cup]2;3[$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln(3-x)}$. et $f'(x)=\dfrac{-1}{3-x}\times\dfrac{-1}{\ln^2(3-x)}=\dfrac{1}{(3-x)\ln^2(3-x)}>0$
4. On trace alors le tableau de variation que l'on complète avec les limites (pas de forme indéterminée) et qui permet de tracer la courbe

x	-3		-2		0		2		3
$f(x)$	$\Vert$ 0		$\Vert$ $+\infty$				$+\infty$ $\Vert$		0 $\Vert$
	$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$\Vert$
	$\Vert$		$-\infty$ $\Vert$		$\dfrac{1}{\ln(3)}$		$\Vert$ $-\infty$		$\Vert$

Note : le prolongement par continuité n'est pas au programme



5. Question supplémentaire soit $n\in\mathbb{N}$, déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=n$.
   On énonce le théorème de la bijection
   L'équation admet deux solutions si $y\in\mathbb{R}_-^*\cup]\dfrac{1}{\ln(3)};+\infty[$ et une seule si $y=\dfrac{1}{\ln(3)}$
   Sauf qu'on nous précise qu'ici, n est un entier naturel.
   Comme $3>e$, $\ln(3)>\ln(e)=1$ et donc $\dfrac{1}{\ln(3)}\in]0;1[$

   $\boxed{\text{Si } n\in\mathbb{N}^*\text{, l'équation } f(x)=n \text{ admet deux solutions, l'équation } f(x)=0 \text{ n'admet pas de solution}}$

SUJET T2

Exercice principal T2

1. **Question de cours** : fonction continue en un point.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction
$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x(\ln(x))^n & \text{si } x \in [1;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
   On donne l'approximation numérique suivante $\ln(2) \approx 0.7$.
2. Tracer l'allure de la courbe de f_1. Est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?
3. On note maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^2 x.(\ln(x))^n \, dx$.
   (a) Calculer I_0.
   (b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - \dfrac{n+1}{2} I_n$.
   (b) Compléter le programme SCILAB de manière à afficher un entier N tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N$, alors $I_n \leqslant \dfrac{1}{1000}$

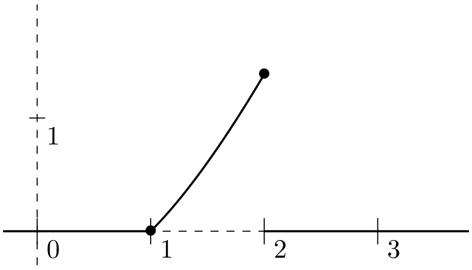
```
 n=0;
 I=
 P=
WHILE (I>0.001)
    P=P*log(2);
    I=

   end;
 disp( );
```

5. Montrer qu'il existe un réel $C_n \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $C_n f_n$ soit une densité de probabilité.

Solution :

1. f est continue en un point a de son domaine de définition ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. (programme ECT1 page 7.)
2. On note que f_1 est dérivable sur $]1;2[$.
   $\forall x \in]1;2[$, $f_1'(x) = 1 + \ln(x) > 1$. $f_1''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$
   La fonction est convexe et croissante sur $[1;2]$,
   $f_1(1) = 0$, $f_1'(1) = 1$, $f_1(2) = 2\ln(2) \approx 1,4$, $f''(2) = 1 + \ln(2) \approx 1,7$
   On peut placer les demi-tangentes
   f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en 2.



3. (a) $I_0 = \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \boxed{= \frac{3}{2}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

   $\forall x \in [1;2]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$, donc $(\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$

   donc $x(\ln(x))^{n+1} \leqslant x(\ln(x))^n$ et par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} \leqslant I_n$ $\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$

   (c) $\forall x \in [1;2]$, $0 \leqslant x(\ln(x))^n \leqslant x(\ln(2))^n$

   Par positivité de l'intégrale : $0 \leqslant I_n \leqslant (\ln(2))^n \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{3(\ln(2))^n}{2}$

   Comme $|\ln(2)| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln(2))^n = 0$ et donc par encadrement :

   $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

4. (a) On va faire une intégration par partie :

   $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^2 x(\ln(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x.$

   On pose $u'(x) = x$, $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $v(x) = (\ln(x))^{n+1}$, $v'(x) = \dfrac{(n+1)}{x}(\ln(x))^n$

   Ainsi $I_{n+1} = \left[\dfrac{x^2.(\ln(x))^{n+1}}{2}\right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2(n+1)(\ln(x))^n}{2x}\,\mathrm{d}x$

   Donc $\boxed{I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - \dfrac{n+1}{2} I_n}$

   (b) Comme la suite (I_n) est décroissante, il suffit de trouver N tel que $I_N \leqslant \dfrac{1}{1000}$.

```
 n=0;
 I=1.5;
 P=1;
WHILE (I>0.001)
    P=P*log(2);
    I=2*P-(n+1)*I/2;
    n=n+1;
   end;
 disp(n)
```

5. La fonction $C_n f_n$ est bien continue sauf en 2 (et admet des limites finies à gauche et à droite en ce point)

   Elle est bien positive si l'on choisit $C_n \geqslant 0$.

   De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} C_n f_n(x)\,\mathrm{d}x = C_n \int_1^2 x(\ln(x))^n\,\mathrm{d}x = C_n I_n.$

   Comme l'intégrale est strictement positive, on pose alors $C_n = \dfrac{1}{I_n}$, et l'on a bien

   $\boxed{C_n f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$

Exercice sans préparation T2

Soient p un réel de $]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([Y = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

On considère la matrice définie aléatoirement par $\forall \omega \in \Omega,\ \ M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) - 3 \\ X(\omega) & 3X(\omega) - 2 \end{pmatrix}$.

Autrement dit $M = \begin{pmatrix} X & Y - 3 \\ X & 3X - 2 \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité que cette matrice soit inversible.

Solution :

1. La matrice est non inversible ssi $X(3X-2) - X(Y-3) = 0$ ssi $X(3X - Y + 1) = 0$ ssi $X = 0$ ou $Y = 3X + 1$.
   Or, $\mathbb{P}([X = 0] \cup [Y = 3X + 1]) = \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([Y = 3X + 1]) - \mathbb{P}([Y = 3X + 1] \cap [X = 0])$
   $$\mathbb{P}([X = 0] \cup [Y = 3X + 1]) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 3k + 1]) - \mathbb{P}([Y = 3] \cap [X = 0]).$$
   $$\mathbb{P}([X = 0] \cup [Y = 3X + 1]) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 3k + 1]).$$
   Or $\mathbb{P}([X = k] \cup [Y = 3k + 1]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{k}$ et $\frac{1}{16} \in]0;1[$, la série converge.
   Dans le programme officiel, ils n'ont pas la formule $\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k$
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 3k + 1]) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{16}} - 1\right) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{16}{15} - 1\right) = \frac{1}{8 \times 15} = \frac{1}{120}$$
   Finalement $\boxed{\mathbb{P}([\text{M est inversible}]) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{120} = \frac{59}{120}}$
2. Question supplémentaire : On suppose que $X = 1$ et $Y = 3$. Calculer alors M^n.
   $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par récurrence ou binôme de Newton, $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}}$

SUJET T3

Exercice principal T3

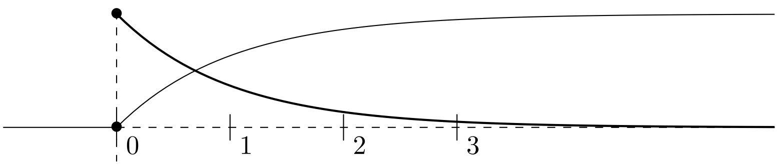
Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre λ, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **Question de cours** : loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
2. On suppose, dans cette question seulement que $\lambda = 1$. Tracer sur un même graphe une densité et la fonction de répartition de X_1.
   On note $Y = \exp(X_1)$
3. Sur quel intervalle Y prend-elle ses valeurs ? Déterminer la fonction de répartition de Y.
4. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \dfrac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$.
   (a) Déterminer $\mathbb{E}(M_n)$.
   (b) Montrer que $V(M_n) = \dfrac{1}{n\lambda^2}$.
   (c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchébytchev, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $a > 0$:
   $$\mathbb{P}\left(\left[-a < M_n - \frac{1}{\lambda} < a\right]\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n(a\lambda)^2}.$$
5. Soit $\alpha \in]0; 1[$.
   (a) Choisir $a > 0$ tel que $\forall \lambda \geqslant 1$, $1 - \dfrac{1}{n(a\lambda)^2} \geqslant 1 - \dfrac{1}{na^2} \geqslant 1 - \alpha$.

   On admet que l'on sait que $\lambda \geqslant 1$.
   (b) Déduire de 4.c et de 5.a que l'intervalle $\left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[$ est un intervalle de confiance pour $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de risque α.

Solution :

1. Une variable X suit une loi exponentielle de paramètre λ ssi sa fonction de répartition vérifie $F(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ si $x > 0$
   Densité, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ (programme ECT2 page 9.)
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \exp(-x)$ et $F(x) = 1 - \exp(-x)$



   $F(0) = 1$, $F'_d(0) = f(0) = 1$, $f'_d(0) = -1$, on peut placer les tangentes.
3. Comme X_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\boxed{\text{Y prend ses valeurs dans } [1; +\infty[}$
   la notation $X(\Omega)$ n'est pas dans le programme officiel
   Si $x \leqslant 1$, $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = 0$, car l'événement $[Y \leqslant x]$ est impossible.
   Si $x > 1$, $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\exp(X_1) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant \ln(x))$ (la fonction ln est strictement croissante)
   Ainsi $\boxed{F_Y(x) = F_X(\ln(x)) = 1 - \exp(-\lambda \ln(x)) = 1 - \dfrac{1}{x^\lambda}}$

4. (a) Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n\mathbb{E}(X_k) \boxed{= \dfrac{1}{\lambda}}$

(b) $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}V(\sum_{k=1}^{n} X_k)$

Comme les variables sont indépendantes :

$V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{n}{n^2\lambda^2} \boxed{= \dfrac{1}{n\lambda^2}}$

(c) On applique l'inégalité à la variable M_n, qui admet une espérance et une variance, et à $a > 0$

$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{a^2}$

On a $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(M_n) = \dfrac{1}{n\lambda^2}$

On passe à l'événement contraire : $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < a) \leqslant 1 - \dfrac{V(M_n)}{a^2}$

Or, $|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < a$ ssi $-a < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < a$. On retrouve bien $\boxed{\mathbb{P}\left(-a < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < a\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n\lambda^2 a^2}}$

5. (a) Pour $\lambda \geqslant 1$, on a déjà la première inégalité car $n(a\lambda)^2 \geqslant na^2$ donc $\dfrac{1}{n(a\lambda)^2} \leqslant \dfrac{1}{na^2}$ et $1 - \dfrac{1}{n(\lambda a)^2} \geqslant 1 - \dfrac{1}{na^2}$

Pour la deuxième inégalité $\dfrac{1}{na^2} \geqslant 1 - \alpha$ ssi $na^2\alpha \geqslant 1$ ssi $a \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$

Il suffit de prendre $\boxed{a = \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}}$

(b) En utilisant 4.c et 5.a avec $a = \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$

$\mathbb{P}\left(\left[\ -\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}\ \right]\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n\lambda^2 a^2} \geqslant 1 - \alpha$

Il suffit de traduire l'événement $\left[\ -\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}\ \right]$ en $[M_n \in I]$ avec I un intervalle.

$-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} < M_n - \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}$ ssi $-\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} - M_n < -\dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} - M_n$

ssi $\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} + M_n > \dfrac{1}{\lambda} > -\dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}} + M_n$ ssi $\dfrac{1}{\lambda} \in \left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[$.

$\boxed{\left]M_n - \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}; M_n + \sqrt{\dfrac{1}{n\alpha}}\right[\text{ est un intervalle de confiance pour } \dfrac{1}{\lambda} \text{ au niveau de risque } \alpha.}$

Exercice sans préparation T3

Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On définit une suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{q^n}{n!}$
Donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et prouvez le résultat proposé.

Solution :

* Une réponse utilisant la convergence de la série exponentielle est bien sûr possible.
* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{q}{n+1}$, donc $(u_n > 0)$ la suite est décroissante à partir du rang $N = \lfloor q \rfloor$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Et si elle converge vers $\ell \neq 0$,par unicité de la limite $\dfrac{\ell}{\ell} = 0$

C'est absurde

Question supplémentaire : faire la preuve avec une autre méthode.

* On peut aussi remarquer que pour $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{q}{N+1}\right) u_n$

Par récurrence immédiate, $u_n \leqslant u_N \left(\dfrac{q}{N+1}\right)^{n-N}$ et comme $\dfrac{q}{N+1} \in]0;1[$, on peut conclure par encadrement.